

УДК 517.53:532.546

ЗАДАЧА \mathbb{R} -ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СОФОКУСНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО КОЛЬЦА

Ю.В. Обносов, М.А. Егорова

Аннотация

В статье дается замкнутое аналитическое решение задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения для софокусного параболического кольца. Полностью исследованы случаи вещественных и комплексных коэффициентов краевого условия. Решение найдено в классе кусочно-голоморфных функций, принимающих заданное конечное значение на бесконечности в одном из компонентов среды.

Ключевые слова: гетерогенная среда, задача \mathbb{R} -линейного сопряжения, голоморфные функции.

Настоящая статья является непосредственным продолжением серии работ [1–6], посвященных изучению многофазных гетерогенных сред, разнородные фазы которых сопрягаются вдоль кривых второго порядка. Ниже будет приведено решение, поставленной в [7, с. 158], задачи 2 для трехфазной среды, линиями сопряжения разнородных компонентов которой служат две софокусные параболы. В двухфазном случае задача о параболическом включении в довольно общей ситуации рассматривалась в работе [8]. Результаты последней работы были уточнены и обобщены в монографии [7, с. 50].

Исследуемая ниже проблема в терминах кусочно-голоморфной функции $v(z) = v_x(x, y) - i v_y(x, y)$, комплексно сопряженной с вектор-функцией комплексной скорости $\mathbf{v}(z) = v_x(x, y) + i v_y(x, y)$, приводится [9, с. 53], к следующей краевой задаче \mathbb{R} -линейного сопряжения:

$$v_p(t) = A_{pq}v_q(t) - B_{pq}[t'(s)]^{-2}\overline{v_q(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_{pq}, \quad (1)$$

где $v_p(z)$ – голоморфный в однородной фазе S_p компонент функции $v(z)$, а \mathcal{L}_{pq} – линия сопряжения разнородных фаз S_p и S_q . Коэффициенты краевого условия (1) в общем случае определяются по формулам:

$$A_{pq} = \frac{\rho_p + \rho_q}{2\rho_p} - i \frac{\rho_p\beta_p - \rho_q\beta_q}{2\rho_p}, \quad B_{pq} = \frac{\rho_p - \rho_q}{2\rho_p} - i \frac{\rho_p\beta_p - \rho_q\beta_q}{2\rho_p}, \quad (2)$$

в частности

$$A_{pq} = \frac{\rho_p + \rho_q}{2\rho_p}, \quad B_{pq} = \frac{\rho_p - \rho_q}{2\rho_p}. \quad (3)$$

Здесь параметры: $\rho_p \geq 0$ (коэффициент сопротивления) и $\beta_p \geq 0$ (параметр Холла) – характеризуют физические свойства среды S_p . Отметим, что к задаче (1) с комплексными коэффициентами (2) сводится, например, проблема формирования электрического поля в плоской электропроводящей гетерогенной среде под воздействием перпендикулярного к ней магнитного поля.

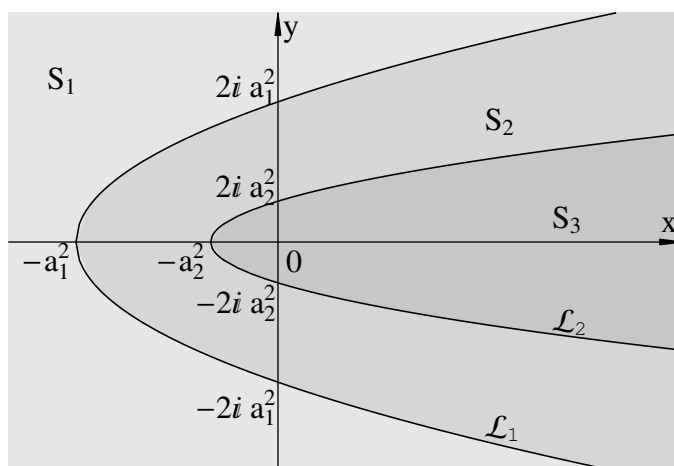


Рис. 1. Двухфазное параболическое включение

1. Задача (1) для параболического кольца в случае вещественных коэффициентов

Уточняя приведенную выше постановку, рассмотрим трехфазную среду, представляющую из себя бесконечную область S_1 с инородными включениями S_2 и S_3 (см. рис. 1), ограниченными двумя софокусными параболой \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 , оси которых совпадают с вещественной осью плоскости z , фокусы лежат в начале координат, а вершины – в точках $-a_1^2$ и $-a_2^2$, то есть уравнения парабол имеют вид:

$$y^2 = 4a_k^2(x + a_k^2), \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

где $a_1 > a_2 > 0$.

Краевое условие (1) перепишем в виде:

$$v_k(t) = A_k v_{k+1}(t) - B_k [t'(s)]^{-2} \overline{v_{k+1}(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_k, \quad k = 1, 2. \quad (5)$$

Здесь для краткости записи для коэффициентов (3) введены обозначения $A_k = A_{k k+1}$, $B_k = B_{k k+1}$. В качестве дополнительного условия потребуем, чтобы функция $v_3(z)$ принимала заданное значение на бесконечности:

$$v_3(\infty) = V_0 = V_{0x} - i V_{0y}. \quad (6)$$

В [7, с. 45] было доказано, что условие (6), не приводя к противоречиям, обеспечивает единственность решения задачи (5) в случае одного параболического включения. Ниже будет показано, что аналогичное утверждение имеет место и в рассматриваемой ситуации.

В силу симметричности парабол \mathcal{L}_1 , \mathcal{L}_2 относительно вещественной оси решением задачи (5) с вещественными коэффициентами A_k , B_k вместе с функцией $v(z)$ будет и функция $\overline{v(\bar{z})}$. Следовательно, справедливо представление:

$$v(z) = V_{0x} v_R(z) - V_{0y} v_I(z), \quad (7)$$

где

$$v_R(z) = (v(z) + \overline{v(\bar{z})})/2V_{0x}, \quad v_I(z) = -(v(z) - \overline{v(\bar{z})})/2V_{0y} \quad (8)$$

являются решениями задач (5), (6), удовлетворяющими условиям

$$\begin{aligned} \overline{v_R(\bar{z})} &\equiv v_R(z), & v_R(\infty) &= 1; \\ \overline{v_I(\bar{z})} &\equiv -v_I(z), & v_I(\infty) &= i. \end{aligned} \quad (9)$$

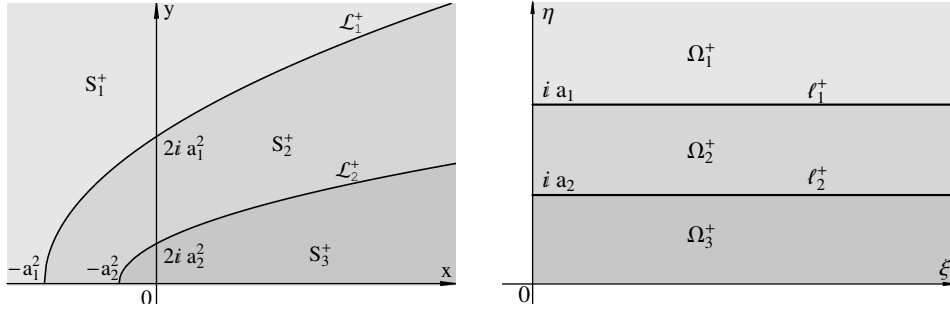


Рис. 2. Верхняя полуплоскость плоскости z и её образ на плоскости ζ при отображении с помощью функции (10)

Итак, достаточно построить частные решения $v_R(z)$ и $v_I(z)$, причем лишь для верхней полуплоскости $\mathbb{C}^+ = \{z : \text{Im } z > 0\}$. Чтобы найти частное решение $v_R(z)$ задачи (5), удовлетворяющее соответствующим условиям (9), рассмотрим конформное отображение \mathbb{C}^+ на первый квадрант плоскости $\zeta = \xi + i\eta$ с помощью функции

$$\zeta(z) = \sqrt{z}, \quad (10)$$

обратной к $z(\zeta) = \zeta^2$. Ветвь радикала $\zeta = \sqrt{z}$, фиксированная в \mathbb{C}^+ условием $\zeta > 0$ при $z > 0$, отображает верхнюю полуплоскость на первый квадрант $\mathbb{C}_+^+ = \{z : \text{Im } z > 0, \text{Re } z > 0\}$ плоскости ζ с соответствием областей $S_j^+ \rightarrow \Omega_j^+$, $j = 1, 2, 3$ (рис. 2). Полупараболы \mathcal{L}_k^+ переходят в лучи

$$\ell_k^+ = \{\zeta : \text{Im } \zeta = a_k, \text{Re } \zeta > 0\}. \quad (11)$$

Чтобы найти вид граничных условий на ℓ_k^+ , в которые перейдут условия (5), используем найденную в [7, с. 44] зависимость от t производной функции точки $t(s) \in \mathcal{L}_k$ по натуральному параметру s :

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^{-2} = \frac{\sqrt{t} - 2i a_k}{\sqrt{t}} = \frac{\overline{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} = \frac{\bar{\tau}}{\tau}, \quad t \in \mathcal{L}_k^+, \quad \tau \in \ell_k^+. \quad (12)$$

На основании (5), (9) и (12) относительно кусочно-голоморфной в первом квадранте \mathbb{C}_+^+ функции

$$V(\zeta) = \zeta v_R(\zeta^2) \quad (13)$$

придем к краевой задаче:

$$V_k(\tau) = A_k V_{k+1}(\tau) - B_k \overline{V_{k+1}(\tau)}, \quad \tau \in \ell_k^+, \quad k = 1, 2, \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{Im } V_3(\xi) &= 0, \quad \xi > 0, \\ \text{Re } V(i\eta) &= 0, \quad \eta > 0 \end{aligned} \quad (15)$$

с дополнительными условиями:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [V_3(\zeta)/\zeta] = 1, \quad V_3(0) = 0, \quad (16)$$

вытекающими из соответствующих условий (9) и представления (13). Функция (13) в силу последнего условия (15) допускает аналитическое продолжение по непрерывности из \mathbb{C}_+^+ во второй квадрант \mathbb{C}_-^+ .

Компоненты $\mathcal{V}_k(\zeta)$ продолженной по принципу симметрии функции

$$\mathcal{V}(\zeta) = \begin{cases} V(\zeta), & \zeta \in \mathbb{C}_+^+, \\ -\overline{V(-\bar{\zeta})}, & \zeta \in \mathbb{C}_+^-, \end{cases}$$

голоморфны в соответствующих областях $\Omega_k = \{\zeta : a_{k-1} < \operatorname{Im} \zeta < a_k\}$, $k = 1, 2, 3$ ($a_0 = \infty$, $a_3 = 0$), удовлетворяют условиям (14) на прямых $\ell_k = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta = a_k\}$, $k = 1, 2$, и в силу второго условия (15) функция $\mathcal{V}_3(\zeta)$ вещественна на вещественной оси. Ясно также, что продолженная функция удовлетворяет условиям (16) и условию симметрии: $\mathcal{V}(\zeta) \equiv -\overline{\mathcal{V}(-\bar{\zeta})}$. Таким образом, пришли к краевой задаче:

$$\mathcal{V}_k(\tau) = A_k \mathcal{V}_{k+1}(\tau) - B_k \overline{\mathcal{V}_{k+1}(\tau)}, \quad \tau \in \ell_k, \quad k = 1, 2; \quad (17)$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{V}_3(\xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{R}; \quad (18)$$

с дополнительными условиями:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} [\mathcal{V}_3(\zeta)/\zeta] = 1, \quad \mathcal{V}_3(0) = 0, \quad \mathcal{V}(\zeta) \equiv -\overline{\mathcal{V}(-\bar{\zeta})}. \quad (19)$$

Прежде чем переходить к решению последней задачи, докажем следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть S_1 и S_{n+1} — полуплоскости: $S_1 = \{z : \operatorname{Im} z > h_1\}$, $S_{n+1} = \{z : \operatorname{Im} z < h_n\}$; S_k — полосы: $S_k = \{z : h_k < \operatorname{Im} z < h_{k+1}\}$, $k = 2, \dots, n$. Кусочно-голоморфная функция $v(z) = v_k(z) \in \mathcal{H}(S_k) \cap C(\bar{S}_k \setminus \{\infty\})$, $k = 1, 2, \dots, n+1$, удовлетворяет граничным условиям

$$v_{k+1}(t) = A'_k v_k(t) - B'_k \overline{v_k(t)}, \quad t \in \ell_k = \{z : \operatorname{Im} z = h_k\} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (20)$$

с комплексными коэффициентами (2): $A'_k = A_{k+1k}$, $B'_k = B_{k+1k}$, а на бесконечности справедлива оценка

$$|v(z)| = o(|z|^{m+1}) \quad \text{для} \quad |z| \gg 1, \quad (21)$$

где m — целое неотрицательное число. Тогда каждый из компонентов $v_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots, n+1$) является полиномом степени не выше m , причем степени всех полиномов равны между собой.

Доказательство. Рассмотрим интеграл Коши по границе полосы S_k с плотностью в виде исчезающей на бесконечности и голоморфной в этой полосе функции $(z - z_0)^{-m-1} v_k(z)$, где z_0 — любая внешняя по отношению к полосе S_k точка. Разбивая этот интеграл на два по компонентам границы ℓ_{k-1} , ℓ_k , получим представление для $v_k(z)$ в виде суммы $v_k(z) = v_k^+(z) + v_k^-(z)$, слагаемые которой голоморфны в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > h_k$ и $\operatorname{Im} z < h_{k-1}$ соответственно и удовлетворяют условию (21). Перепишем краевые условия (20) в виде

$$v_{k+1}^+(t) + v_{k+1}^-(t) = A'_k (v_k^+(t) + v_k^-(t)) - B'_k (\overline{v_k^+(\bar{t} + 2i h_k)} + \overline{v_k^-(\bar{t} + 2i h_k)}),$$

где $v_1^-(z) \equiv 0$, $v_1^+(z) = v_1(z)$, $v_{n+1}^+(z) \equiv 0$, $v_{n+1}^-(z) = v_{n+1}(z)$. Следовательно, голоморфная в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > h_k$, $\operatorname{Im} z < h_k$ функция

$$P_k(z) = \begin{cases} v_{k+1}^+(z) - A'_k v_k^+(z) + B'_k \overline{v_k^-(\bar{z} + 2i h_k)}, & \operatorname{Im} z > h_k, \\ A'_k v_k^-(z) - v_{k+1}^-(z) - B'_k \overline{v_k^+(\bar{z} + 2i h_k)}, & \operatorname{Im} z < h_k \end{cases} \quad (22)$$

непрерывна на прямой ℓ_k . По теореме о непрерывном аналитическом продолжении функция $P_k(z)$ голоморфна в плоскости \mathbb{C} . На бесконечности для нее, очевидно, справедлива оценка (21). В силу обобщенной теоремы Лиувилля $P_k(z)$ является полиномом степени не выше m . Отсюда, в частности, следует, что функции $v_k^+(z)$ и $v_{k+1}^-(z)$ допускают аналитическое продолжение соответственно в полуплоскости $\text{Im } z > h_k - d$ и $\text{Im } z < h_k + d$, где $d = \min_{1 \leq k \leq n-1} d_k$, а $d_k = h_k - h_{k+1}$ — ширина полосы S_{k+1} . Дифференцируя $m+1$ раз левые и правые части соотношений (22) получим

$$\begin{aligned} f_{k+1}^+(z) &= A'_k f_k^+(z) - \overline{B'_k f_k^-(\bar{z} + 2i h_k)}, \quad \text{Im } z > h_k, \\ f_{k+1}^-(z) &= A'_k f_k^-(z) - \overline{B'_k f_k^+(\bar{z} + 2i h_k)}, \quad \text{Im } z < h_k, \end{aligned} \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (23)$$

где $f_k^\pm(z) = [v_k^\pm(z)]^{(m+1)}$.

Из (23) с учетом $f_1^-(z) \equiv 0$ последовательно получим:

$$\begin{aligned} f_2^+(z) &= A'_1 f_1^+(z), \quad f_2^-(z) = -\overline{B'_1 f_1^+(\bar{z} + 2i h_1)} \quad \text{при } k = 1, \\ f_3^+(z) &= A'_2 A'_1 f_1^+(z) + B'_2 \overline{B'_1 f_1^+(z + 2i d_1)}, \\ f_3^-(z) &= -A'_2 B'_1 \overline{f_1^+(\bar{z} + 2i h_1)} - B'_2 \overline{A'_1 f_1^+(\bar{z} + 2i h_2)} \quad \text{при } k = 2. \end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, получим представление для f_k^\pm через f_1^+ для $k = 2, \dots, n$. Так как $f_{n+1}^+(z) \equiv 0$, из (23) при $k = n$ следует: $A'_n f_n^+(z) - \overline{B'_n f_n^-(\bar{z} + 2i h_n)} \equiv 0$. Отсюда методом полной математической индукции несложно получить следующее функциональное уравнение относительно $f_1^+(z)$:

$$f_1^+(z) = \sum_{|\mathbf{k}|=1}^{n-1} \delta_{\mathbf{k}} f_1^+(z + 2i D_{\mathbf{k}}), \quad (24)$$

где \mathbf{k} — упорядоченный мультииндекс, то есть если $|\mathbf{k}| = l$, то $\mathbf{k} = (j_1, j_2, \dots, j_l)$ и $1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_l \leq n-1$, $D_{\mathbf{k}} = d_{j_1} + d_{j_2} + \dots + d_{j_l}$ и $|\delta_{\mathbf{k}}| < 1$. Интегрируя $m+1$ раз уравнение (24), придем относительно $v_1(z)$ к уравнению вида

$$v_1(z) = \sum_{|\mathbf{k}|=1}^{n-1} \delta_{\mathbf{k}} v_1(z + 2i D_{\mathbf{k}}) + P(z), \quad (25)$$

где $P(z)$ — полином степени m . Функция $v_1(z)$ голоморфна в полуплоскости $\text{Im } z > h_1$, значит, правая часть равенства (25), а вместе с ней и функция $v_1(z)$ голоморфны в полуплоскости $\text{Im } z > h_1 - d$ и удовлетворяют там оценке (21). Отсюда следует голоморфность обеих частей равенства (25) и справедливость оценки (21) в любой из полуплоскостей $\text{Im } z > h_1 - Nd$ для произвольного натурального N . Следовательно, поскольку $d = \min_{1 \leq k \leq n-1} d_k > 0$, функция $v_1(z)$ голоморфна в плоскости \mathbb{C} и удовлетворяет оценке (21) в окрестности бесконечности. По обобщенной теореме Лиувилля $v_1(z)$ — полином степени не выше m . Следовательно, $f_1^+(z) \equiv 0$, а значит, и все $f_k^\pm(z) \equiv 0$, $k = 2, \dots, n+1$, то есть $v_k(z)$ — полиномы, степени которых не превосходят m . Совпадение степеней всех этих полиномов вытекает из граничных условий (20). Тем самым лемма полностью доказана. \square

Возвращаясь к решению задачи (14)–(16), с помощью условия (15) продолжим функцию $\mathcal{V}_3(\zeta)$ по симметрии до функции $\mathcal{V}_3^*(\zeta)$, голоморфной в полосе $\Omega_3^* = \{\zeta : -a_2 < \text{Im } \zeta < a_2\}$, и определим функции $\mathcal{V}_k^*(\zeta) = \overline{\mathcal{V}_k(\bar{\zeta})}$, $k = 1, 2$, голоморфные в полуплоскостях $\Omega_1^* = \{\zeta : \text{Im } \zeta < -a_1\}$ и в полосе $\Omega_2^* = \{\zeta : -a_1 < \text{Im } \zeta < -a_2\}$

соответственно. Ясно, что введенные таким образом функции удовлетворяют краевым условиям (17) на прямых ℓ_k^* , симметричных относительно вещественной оси с соответствующими прямыми ℓ_k . Таким образом, пришли к задаче (20) при $n = 4$ и $m = 1$, компоненты решения которой, в силу доказанной леммы, являются полиномами первого порядка. Учитывая условия (18), (19), решение задачи (17) следует отыскивать в следующем виде:

$$\mathcal{V}(\zeta) = \begin{cases} \mathcal{V}_1(\zeta) = a_{11}\zeta + i a_{12}, & \text{Im } \zeta > a_1, \\ \mathcal{V}_2(\zeta) = a_{22}\zeta + i a_{22}, & a_2 < \text{Im } \zeta < a_1, \\ \mathcal{V}_3(\zeta) = \zeta, & 0 < \text{Im } \zeta < a_2. \end{cases} \quad (26)$$

Здесь a_{kj} – вещественные коэффициенты, подлежащие определению. Требуя, чтобы функция (26) удовлетворяла условиям (17), с учетом справедливых на соответствующих прямых $\eta = a_k$ равенств: $\bar{\tau} = \tau - i 2a_k$, $k = 1, 2$, получим систему:

$$\begin{aligned} a_{11}\tau + i a_{12} &= A_1(a_{21}\tau + i a_{22}) - B_1(a_{21}(\tau - i 2a_1) - i a_{22}), \\ a_{21}\tau + i a_{22} &= A_2\tau - B_2(\tau - i 2a_2). \end{aligned}$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при τ и свободные члены, искомые коэффициенты однозначно определим по формулам:

$$a_{11} = \theta_1\theta_2, \quad a_{12} = a_2(1 + \theta_2) + a_1\theta_2(1 - \theta_1), \quad a_{21} = \theta_2, \quad a_{22} = a_2(1 - \theta_2),$$

где

$$\theta_k = \rho_{k+1}/\rho_k, \quad k = 1, 2. \quad (27)$$

Возвращаясь в плоскость комплексного переменного z , с учетом (10), (13) получим:

$$\begin{aligned} v_{R1}(z) &= \theta_1\theta_2 + i[a_2(1 - \theta_2) + a_1\theta_2(1 - \theta_1)]/\sqrt{z}, \\ v_{R2}(z) &= \theta_2 + i a_2(1 - \theta_2)/\sqrt{z}, \\ v_{R3}(z) &\equiv 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Аналогично находится частное решение $v_I(z)$ задачи (5), удовлетворяющее соответствующим условиям (9). Опуская элементарные выкладки, запишем окончательный результат:

$$\begin{aligned} v_{I1}(z) &= i + [a_2\theta_1(1 - \theta_2) + a_1(1 - \theta_1)]/\sqrt{z}, \\ v_{I2}(z) &= i + a_2(1 - \theta_2)/\sqrt{z}, \\ v_{I3}(z) &\equiv i. \end{aligned} \quad (29)$$

На основании (7), (28), (29) искомое решение задачи (5), (6) получим в виде:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \theta_1\theta_2 V_{0x} - i V_{0y} + i[a_2(1 - \theta_2)(V_{0x} + i\theta_1 V_{0y}) + a_1(1 - \theta_1)(\theta_2 V_{0x} + i V_{0y})]/\sqrt{z}, \\ v_2(z) &= \theta_2 V_{0x} - i V_{0y} + i a_2(1 - \theta_2)\bar{V}_0/\sqrt{z}, \\ v_3(z) &\equiv V_0. \end{aligned} \quad (30)$$

Замечание 1. В случае вырождения рассмотренной трехфазной структуры в двухфазную, то есть при $\rho_1 = \rho_2$, или $\rho_2 = \rho_3$, формулы (30) приводят к решению задачи о параболическом включении [7, с. 45]. Для однородной среды при $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ решение (30) вырождается в тождественную константу V_0 , как это и должно быть.

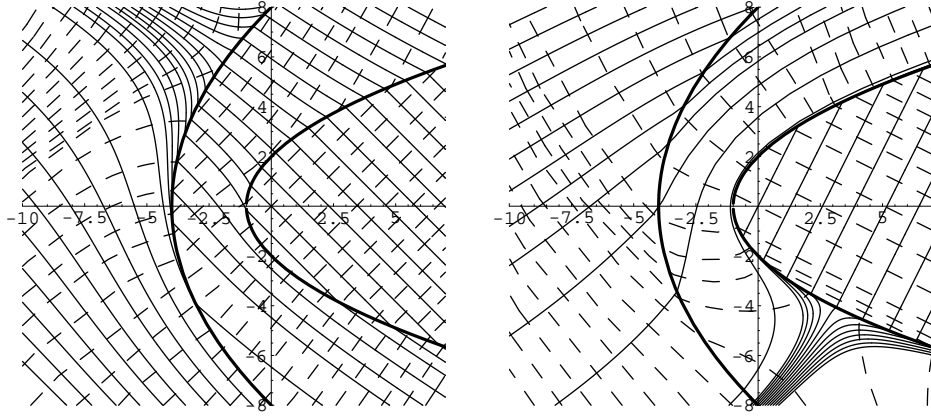


Рис. 3. Сплошные линии – линии тока, пунктирные – эквипотенциали

На рис. 3 приведены примеры распределения линий тока и эквипотенциалей для рассмотренной структуры. Вершины парабол лежат в точках: -1 и -4 . Слева коэффициенты сопротивления принимают значения: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 10$, $\rho_3 = 20$, $V_0 = 1 + i$, а справа – $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.5$, $\rho_3 = 50$, $V_0 = 1 - 2i$.

2. Решение задачи (5), (6) в случае комплексных коэффициентов (2)

В силу доказанной в предыдущем разделе леммы и в случае комплексных коэффициентов (2) структура решения задачи (5), (6) остается такой же, как и в вещественном, рассмотренном выше, случае, а именно:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= C_1 + i D_1 / \sqrt{z}, \\ v_2(z) &= C_2 + i D_2 / \sqrt{z}, \\ v_3(z) &= V_0, \end{aligned} \quad (31)$$

где C_k , D_k – некоторые постоянные, в данном случае комплексные коэффициенты.

Подставив (31) в (13) и получившийся результат в краевое условие (17), имеем

$$\begin{aligned} C_1(\xi + i a_1) + i D_1 &= A_1 C_2(\xi + i a_1) + i A_1 D_2 - B_1 \overline{C_2}(\xi - i a_1) + i B_1 \overline{D_2}, \\ C_2(\xi + i a_2) + i D_2 &= A_2(\xi + i a_2) V_0 - B_2(\xi - i a_2) \overline{V_0}. \end{aligned}$$

Отсюда, сравнивая коэффициенты при ξ и свободные члены, приходим к системе уравнений:

$$\begin{aligned} C_1 &= A_1 C_2 - B_1 \overline{C_2}, \quad C_2 = A_2 V_0 - B_2 \overline{V_0}, \\ a_1 C_1 + D_1 &= a_1 A_1 C_2 + A_1 D_2 + a_1 B_1 \overline{C_2} + B_1 \overline{D_2}, \\ a_2 C_2 + D_2 &= a_2 A_2 V_0 + a_2 B_2 \overline{V_0}. \end{aligned}$$

Решая её, найдем:

$$\begin{aligned} C_1 &= (A_1 A_2 + B_1 \overline{B_2}) V_0 - (A_1 B_2 + B_1 \overline{A_2}) \overline{V_0}, \quad C_2 = A_2 V_0 - B_2 \overline{V_0}, \\ D_1 &= (2a A_1 B_2 + 2b B_1 \overline{A_2}) V_0 + (2b B_1 \overline{B_2} - 2a B_1 \overline{B_2}) \overline{V_0}, \quad D_2 = 2i a B_2 \overline{V_0}. \end{aligned}$$

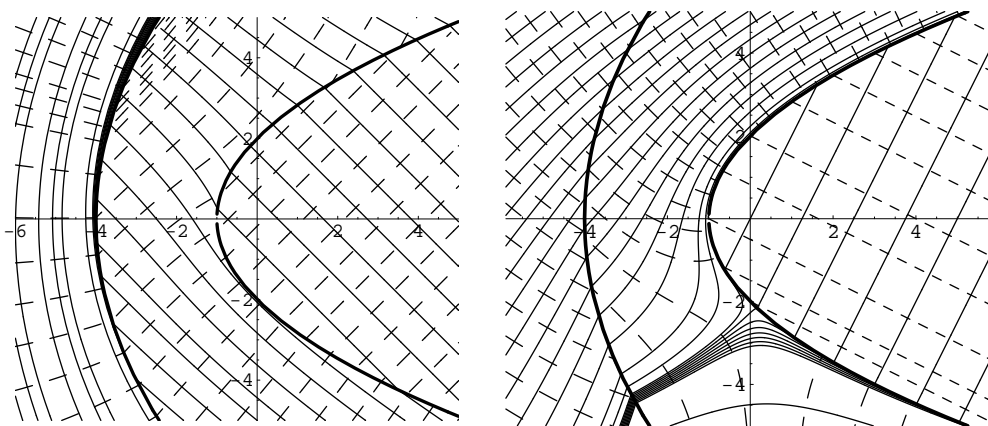


Рис. 4. Распределение линий тока и эквипотенциалей в параболическом кольце при учете эффекта Холла

На основании (31) единственное решение задачи (5), (6) с комплексными коэффициентами (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= (A_1 A_2 + B_1 \overline{B_2}) V_0 - (A_1 B_2 + B_1 \overline{A_2}) \overline{V_0} + \\ &\quad + 2i [(a_2 A_1 B_2 + a_1 B_1 \overline{A_2}) \overline{V_0} - B_1 \overline{B_2} (a_1 - a_2) V_0] / \sqrt{z}, \quad z \in S_1, \\ v_2(z) &= A_2 V_0 - B_2 \overline{V_0} (1 - 2i a_2 / \sqrt{z}), \quad z \in S_2, \\ v_3(z) &= V_0, \quad z \in S_3. \end{aligned} \quad (32)$$

Комплексной скорости (32) соответствует комплексный потенциал $w(z) = w_k(z)$ при $z \in S_k$:

$$\begin{aligned} w_1(z) &= [(A_1 A_2 + B_1 \overline{B_2}) V_0 - (A_1 B_2 + B_1 \overline{A_2}) \overline{V_0}] (z + a_1^2) + \\ &\quad + 4i [(a_2 A_1 B_2 + a_1 B_1 \overline{A_2}) \overline{V_0} - B_1 \overline{B_2} (a_1 - a_2) V_0] (\sqrt{z} - i a_1), \\ w_2(z) &= (A_2 V_0 - B_2 \overline{V_0}) (z + a_1^2) - 4i a_2 B_2 \overline{V_0} (\sqrt{z} - i a_1), \\ w_3(z) &= V_0 (z + a_2^2) + \theta_2^{-1} \operatorname{Re} w_2(-a_2^2) + i \operatorname{Im} w_2(-a_2^2). \end{aligned} \quad (33)$$

Здесь константы интегрирования подобраны таким образом, чтобы обеспечить при переходе через линии сопряжения разнородных фаз непрерывность функции тока $\psi(z) = \operatorname{Im} w(z)$ и требуемую пропорциональность потенциала $\varphi(z) = \operatorname{Re} w(z)$: $\rho_k \varphi_k(t) = \rho_{k+1} \varphi_{k+1}(t)$, $t \in \mathcal{L}_k$, $k = 1, 2$.

Примеры расчета распределения линий тока и эквипотенциалей по формулам (32) и (33) приведены на рис. 4 (слева и справа соответственно). В первом случае коэффициенты сопротивления и параметры Холла принимают значения: $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 10$, $\rho_3 = 20$, $\beta_1 = 8$, $\beta_2 = 4$, $\beta_3 = 2$, $V_0 = 1 + i$, а во втором — $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 0.5$, $\rho_3 = 50$, $\beta_1 = 0.9$, $\beta_2 = -0.1$, $\beta_3 = 0.3$, $V_0 = 1 - i2$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193) и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-97008-р_поволжье_а и 09-01-12188-офи_м).

Summary

Yu.V. Obnosov, M.A. Egorova. \mathbb{R} -linear Conjugation Problem for a Confocal Parabolic Annulus.

The article presents an analytical closed-form solution derived for an \mathbb{R} -linear conjugation problem for a confocal parabolic annulus. The cases of real and complex coefficients of boundary conditions are comprehensively studied. The solution is found in the class of piece-wise holomorphic functions with fixed finite value at infinity in one of the media components.

Key words: heterogeneous media, \mathbb{R} -linear conjugation problem, holomorphic functions.

Литература

1. *Обносков Ю.В.* Решение задачи \mathbb{R} -линейного сопряжения в случае гиперболической линии разделения разнородных фаз // Изв. вузов. Матем. – 2004. – № 7. – С. 53–62.
2. *Обносков Ю.В.* Решение задачи о распределении фильтрационных полей в бесконечном пористом массиве с двумя круговыми включениями // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 2. – С. 109–123.
3. *Мальцева А.М., Обносков Ю.В., Рогозин С.В.* Обобщение теоремы Милн-Томсона на случай концентрического кольца // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 4. – С. 35–50.
4. *Obnosov Yu.V.* A generalized Milne-Thomson theorem for the case of parabolic inclusion // Appl. Math. Model. – 2009. – V. 33. – P. 1970–1981.
5. *Obnosov Yu.V., Nikonenkova T.V.* Solution of an \mathbb{R} -linear conjugation problem on the case of hyperbolic interface // Lithuanian Math. J. – 2008. – V. 48, No 3. – P. 322–331.
6. *Обносков Ю.В.* Задача \mathbb{R} -линейного сопряжения для софокусного эллиптического кольца // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 4. – С. 137–1146.
7. *Обносков Ю.В.* Краевые задачи теории гетерогенных сред. (Многофазные среды, разделенные кривыми второго порядка). – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2009. – 205 с.
8. *Голубева О.В., Шпилевой А.Я.* О плоской фильтрации в средах с прерывно изменяющейся проницаемостью вдоль кривых второго порядка // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1967. – № 2. – С. 174–179.
9. *Емец Ю.П.* Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред. – Киев: Наукова думка, 1987. – 254 с.

Поступила в редакцию
12.05.09

Обносков Юрий Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: yobnosov@ksu.ru

Егорова Мария Александровна – студент механико-математического факультета Казанского государственного университета.